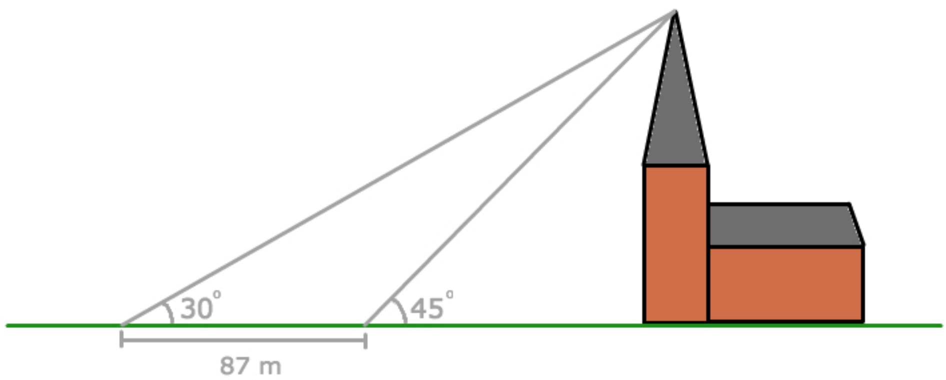
Klurhäftet

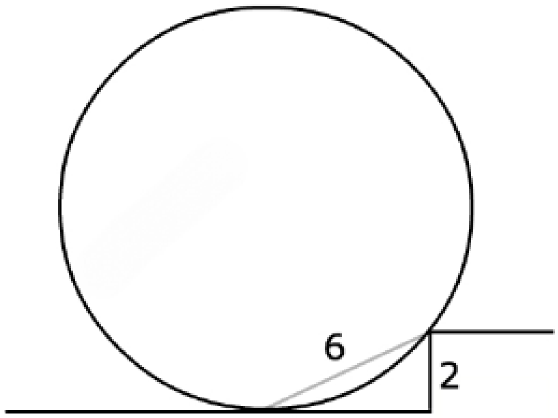
Kluriga problem för Proppen

Geometri

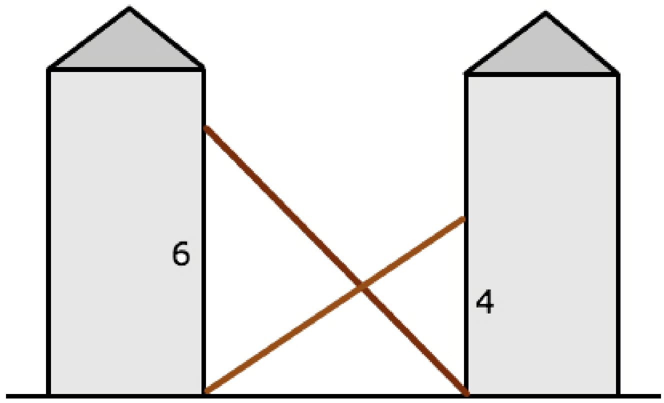
1) Gustav bestämde sig för att räkna ut hur hög domkyrkan i Uppsala är. Han ställde sig på ett avstånd från domkyrkan och mätte vinkeln mellan marken och toppen av kyrkan och fann att vinkeln blev 45 grader. Sedan backade han 87 meter i rikting bort från domkyrkan och gjorde samma mätning och fann att vinkeln nu var 30 grader. Hur hög är domkyrkan i Uppsala?



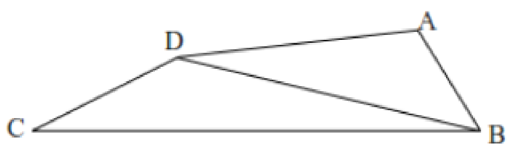
2) Ett hjul vilar mot en kant vars höjd är 2 dm och avståndet från punkten där hjulet står på marken till där hjulet träffar kanten är 6 dm. Vad har hjulet för radie?



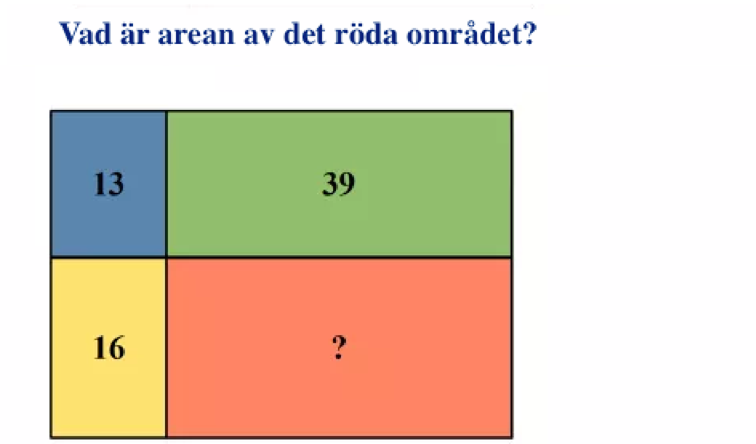
3) Två stegar står uppställda som på bilden. Ena stegen når 6 meter upp på ena huset, och den andra stegen når 4 meter upp på det andra huset. På vilken höjd korsar stegarna varandra?



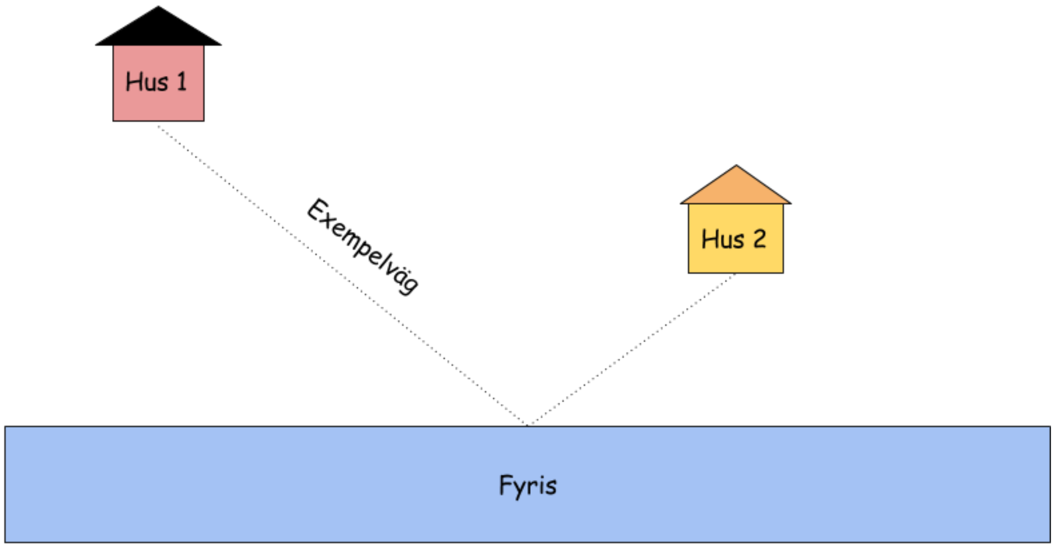
4) I fyrhörningen ABCD är AB = 5 cm, BC = 17 cm, CD = 5 cm, DA = 9 cm och sträckan BD är ett helt antal cm. Hur lång är sträckan BD? Bilden är inte exakt, utan endast schematisk.



5) Beräkna den okända arean som märks av ?



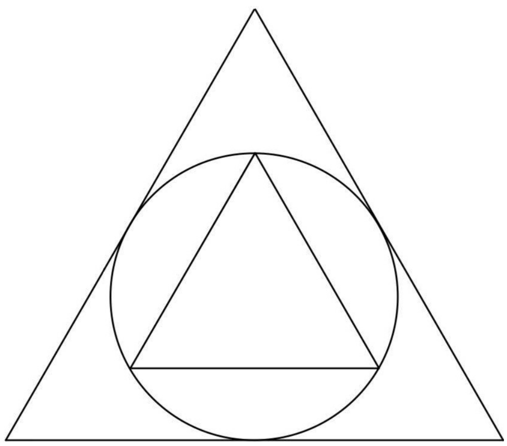
6) Du ska ner till ån och hämta ett vattenprov till din biologkompis. Vilken är den kortaste vägen från ditt hus till biologkompisens hus? Med andra ord, vilken punkt längs ån ska du välja för att minimera sträckan?



7) Bestäm de tal, som är arean av rektanglar med egenskaper att de har sidor med heltalslängd och arean är lika med omkretsen.

8) Omkretsen av en triangel är 8cm och längden på alla sidor i cm är heltal. Bestäm arean av alla sådana trianglar.

9) Hitta kvoten mellan arean av den stora och den lilla triangeln



Klurigt

10) Stryk tolv bokstäver så de återstående bokstäverna bildar endast ett ord.

N E I N O D B A O S K T S E T T Ä T V O E R R D

11) Kan du skapa svaret 10 med hjälp av siffrorna 1, 1, 5 och 8? Varje siffra ska användas exakt en gång. Du får använda plus, minus, gånger, delat och parenteser. Du får inte använda exponenter, dvs $8 + 1 + 1^5$ är inte tillåtet.

12) Kan du hitta alla punkter på jorden där du kan gå en mil söderut, därefter en mil västerut och slutligen en mil norrut och hamna i samma punkt som du började? (Det finns mer än ett svar)

13) En apa är i ett 100-våningshus och vill veta vilken den högsta våningen är som den kan släppa en kokosnöt ifrån utan att den går sönder när det träffar marken. Hur många gånger behöver apan testa att kasta ner en nöt för att garanterat ta reda på det, om den bara har två kokosnötter till godo?

14) Emilia har ett rektangulärt pappersark som hon klipper itu med ett rakt snitt. Sedan klipper hon itu en av delarna också med ett rakt snitt. Slutligen räknar hon ut hur många sidor pappersbitarna har tillsammans. Vilka olika summor kan hon komma fram till?

15) En familj bestående av en pappa, en mamma, ett barn och en mormor kommer fram till en bro mitt i natten. Pappan kan gå över bron på 1 minut, mamman på 2 minuter, barnet på 5 minuter och mormorn på 10 minuter. De har bara en lykta och bron håller endast för två personer åt gången. Hur ska alla ta sig över till andra sidan på 17 minuter? (Om två personer går över samtidigt, går båda lika snabbt som den långsammaste av dem. Man får inte gå på bron utan lyktan. Man får inte lysa långt bortifrån. De får inte bära varandra.)

16) Du har två rep och en tändare. Om du tänder på repets ände tar det exakt en timme för repet att brinna upp. Repets tjocklek varierar och brinner därför inte upp med en konstant hastighet. (Det är därför inte möjligt att dela repet i två delar och anta att det ska ta 30 minuter att bränna upp vardera del.) Hur ska du göra för att mäta 45 minuter?

Mat

17) Ett blad rivs ut från en matlagningsbok. Summan av de återstående sidnumren är 15000. Vilka är sidnumren på det utrivna bladet? (Ledning: Bokens sidor är numrerade 1,2,3,...,N)

18) En nyköpt vattenmelon vägde 10 kg och bestod till 99% av vatten. Efter att ha låtit vattenmelonen ligga ute i solen en hel dag sjönk vätskenivån till 98%. Hur mycket väger vattenmelonen nu?

19) Du har en stekpanna som det får plats två hamburgare i samtidigt. Varje hamburgare behöver stekas 2 min på varje sida. Du är riktigt hungrig och vill nu steka tre hamburgare så fort som möjligt. Vilken är den kortaste tiden det kan ta?

20) En vandrare gick förbi två reccar som skulle äta pannkakor. Ena reccen hade 3 pannkakor, den andra hade 4 pannkakor. Alla pannkakorna delades jämnt mellan de tre personerna. Vandraren betalade sedan för sig med 7 kronor. Hur ska reccarna dela pengarna rättvist mellan sig (det vill säga att pengarna var och en får motsvarar mängden pannkakor var och en gav bort)?

21) Om det tar 5 minuter för 5 propplärare att göra 5 kanelbullar, hur lång tid skulle det ta för 100 propplärare att göra 100 kanelbullar?

22) Femton reccar samlar ihop hundra kokosnätter. Visa att (minst) två av dem har samlat ihop samma antal.

Tid och hastighet

23) En man, som simmar uppför en flod, tappar plötsligt sina badbyxor men märker det först efter tio minuter. Han vänder då och simmar tillbaka nedför floden med samma hastighet som tidigare. Han hinner ifatt sina badbyxor på en plats som låg en kilometer nedanför det ställe där han tappat dem. Hur fort flöt floden?

24) Ett antal bakterier placeras i ett provrör. Efter en sekund delar var och en av dem sig i två, efter ytterligare en sekund delar sig de resulterande i två, o.s.v. Efter en minut är provröret fullt. När var det halvfullt?

25) Om minutvisaren på en klocka just passerat timvisaren, hur länge dröjer det innan detta sker igen?

26) Hur många grader (om några) är vinkeln mellan timvisaren och minutvisaren när klockan visar en kvart över tre?

27) Jag lämnar min ytterdörr och springer på plan mark en viss sträcka, sedan upp för en backe och sedan tillbaka samma väg. Jag springer i 12 km/h på plan mark, 9 km/h i uppförsbacke och 18 km/h i nedförsbacke. Om hela löpturen tar 2 timmar, hur långt springer jag då?

Ekvationer

28) Lös (de oändligt långa) ekvationerna

a) $x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 2$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...}}}} = x$

29) Finn ett värde på x sådant att
$(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = 4^x - 3^x$

30) Finns det två tal, sådana att deras summa, produkt, samt kvot sammanfaller? Dvs finns a och b sådana att: $a+b = a \cdot b = \frac{a}{b}$

31) Låt x vara en lösning till

$$x^2+x+1=0 \implies x+1=-x^2$$

Eftersom $x \neq 0$, så kan vi dela båda sidor med x:

$$x+1+1/x=0$$

Vi byter ut $x+1=-x^2$:

$$-x^2+1/x=0$$

$$1/x=x^2$$

$$1=x^3 \implies x=1$$

Sätt in $x=1$ i $x^2+x+1=0$ för att få:

$$(1)^2+1+1=0$$

$$3=0$$

Var har det skett ett misstag?

Blandat om tal

32) Din propplärare tänkte på ett tal, multiplicerade sedan det med 13, strök sista siffran i resultatet, sedan multiplicerade det nya talet med 7, återigen strök sista siffran i resultat och då fick hen 21. Vilket tal tänkte hen på från början?

33) För vilka primtal p gäller att talet $17p + 1$ är ett kvadrattal?

34) Vilket av talen $log_2 3$ och $log_3 5$ är störst? (Ledning: jämför med $\frac{3}{2}$)

35) Beräkna exakt:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}$$

36) Bestäm det minsta heltal som är sådant att om man sätter dess sista siffra först så blir det dubbelt så stort.

37) Vilket är nästa tal i följden:

2 3 5 8 13 21

38) Man vet att talet

$$1\,00000\,00000\,30000\,00000\,00070\,00000\,00021$$

är sammansatt. Visa det.

Paritet och invarians

39) På ett bord står sju upp och nedvända glas. Man vänder fyra åt gången. Går det att få alla rättvända samtidigt?

40) Kan en springare (även kallad häst) gå från ena hörnet på ett schackbräde till det diagonalt motsatta och på vägen besöka varje ruta exakt en gång?

41) Aya och Benjamin sitter framför två högar med tjugo stenar i varje. De ska turas om och ta antingen en sten ur en av högarna eller en sten ur varje och Aya börjar. Den som tar bort den sista stenen vinner. Finns det en vinnande strategi så att en av dem kan vinna oberoende av hur den andra spelar?

42) Ett schackbräde kan uppenbarligen täckas av dominobrickor som är så stora att en av dem precis täcker två närliggande rutor. Hur är det om man tar bort en ruta i två diagonalt motsatta hörn på brädet?

43) På ett papper står talen: 1, 2, 3, 4, 5... , 2016. Visa att man genom att upprepade gånger tar två tal, suddar ut dem och skriver upp deras skillnad, kan få bara nollor. Hur är det om vi istället går till 2019?

44) Vilket är det minsta icke-negativa tal man kan få om man ersätter stjärnorna i följande uttryck:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * ...775 * 776 * 777$$

med plustecken eller minustecken?

Sannolikhet, kombinatorik och lådprincipen

45) En påse innehåller 16 biljardbollar, några är vita och några är svarta. Du drar två bollar samtidigt. Det är lika sannolikt att de två kommer att ha samma färg som att de kommer ha olika färg. Vad är det för proportion mellan färgerna på bollarna i påsen?

46) I ett land finns tjugosju städer. Regeringen har bestlutat att bygga ut flygnätet mellan städerna så att varje stad ska förbindas med exakt nio andra städer. Är detta möjligt?

47) Fadime har 32 böcker på svenska, 11 på engelska, 4 på franska och 5 på spanska. Hon vill plocka ut böcker så att hon är säker på att hon fått minst två på engelska, men lampan är trasig. Hur många böcker måste hon plocka ut så att hon kan vara säker på att hon lyckats?

48) Bland talen 1, 2, 3... 200 väljs på måfå ut 101 stycken. Visa att det bland dessa finns två som har egenskapen att det ena är delbart med det andra.

49) Alla punkter i planet är färgade röda eler vita. Visa att man kan hitta en rektangel så att alla hörn har samma färg.

Lösningar kluringar

Geometri

1) h = höjd på domkyrkan. Vinkeln 45 leder till att avståndet mellan kyrkan och första mätningen också blir h.

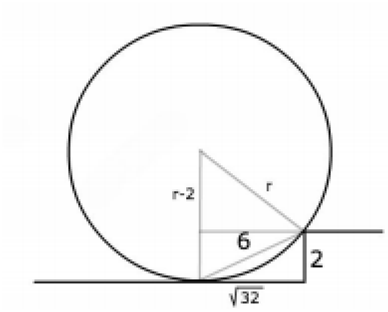
$tan(30) = \frac{h}{87+h} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{87+h} \longrightarrow 87 + h = h \cdot \sqrt{3} \longrightarrow 87 = h \cdot (\sqrt{3} - 1)$

$\longrightarrow \frac{87}{(\sqrt{3}-1)} = h$

$119 = h$

Svar: Uppsala domkyrka är 119 meter hög

2) Rita hjälp linjer



Pythagoras i triangeln ger:
$r^2 = (r-2)^2 + 32$
$r^2 = r^2 - 4r + 4 + 32$
$4r = 36$
$r = 9$

Svar: 9 dm

3) Om vi kallar avståndet mellan husen för a så kan stegarna beskrivas som
$y = 6 - \frac{6}{a} \cdot x$
$y = \frac{4}{a} \cdot x$
Vi sätter ekvationerna lika med varandra
$6 - \frac{6}{a} \cdot x = \frac{4}{a} \cdot x$
$6a - 6x = 4x$
$6a = 10x$
$\frac{6a}{10} = x$
Vi stoppar in x-värdet i någon av stegarnas funktioner
$y = 6 - \frac{6}{a} \cdot \frac{6a}{10} = 6 - \frac{36}{10} = \frac{60}{10} - \frac{36}{10} = \frac{24}{10} = 2.4$

Svar: 2.4 meter

4) Sträckan BD är kortare än "omvägen" BA + AD, således kortare än 5 cm + 9 cm = 14 cm. Men på samma sätt måste sträckan BC vara kortare än "omvägen" BD + DC. Så sträckan som är 17 cm lång ska vara kortare än BD + 5 cm. Därför måste

BD vara längre än 12 cm. Men sträckan BD var ett helt antal centimeter lång, så det måste vara exakt 13 cm.

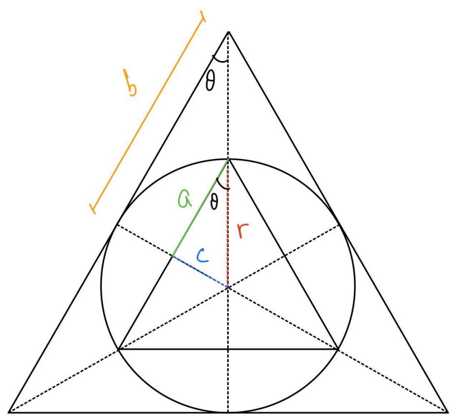
5) Antingen kan man sätta upp fyra variabler, en för varje sidlängd i de fyra rektanglarna, och sedan lösa ekvationssystemet. Eller så inser man att den blå rektangeln får plats 39/13 = 3 gånger i den gröna och lika många gånger kommer den gula få plats i den röda. Arean för den röda rektangeln blir därför 3*16 = 48 ae.

6) Om man ser ån som en linje och speglar Hus 2 under ån, ser man tydligt att den kortaste vägen mellan husen är ett rakt streck från Hus 1 till spegelbilden av Hus 2. Där den vägen korsar ån är bästa punkten att välja för att vägen ska bli så kort som möjligt. Nu är det också enkelt att se att alla andra vägval blir längre. (Här behövs en bild kanske)

7) Låt rektangeln ha sidor a och b. Arean är A = ab, omkretsen är O = 2(a + b). Tanken är att vi på något sätt vill utnyttja att a och b är heltal. Detta gör man oftast genom att använda delbarhet på något sätt. Vi sätter omkrets och arean lika för att få:
2(a + b) = ab
Detta är en inhomogen ekvation, alltså väntar vi oss att vi kan få något på formen 1/något med a och b. Vi löser ut a för att få:
2b = a(b - 2)
2b / (b - 2) = a
Tillämpa polynomdivision för att få det som önskas.
(2b - 4 + 4) / (b - 2) = a
2 + 4/(b - 2) = a
a - 2 = 4/(b - 2)
Eftersom båda led är heltal måste (b - 2) dela 4 (!), dvs (b - 2) = -4, -2, -1, 1, 2, 4
Fallen b = -2 och b = 0 är ointressanta. För resten får vi paren:
{a, b} = {-2, 1}
{a, b} = {6, 3}
{a, b} = {4, 4}
{a, b} = {3, 6}
Första fallet är ointressant, andra och sista är samma, de enda areorna man kan få är alltså $3 \cdot 6$ = 18 och $4 \cdot 4$ = 16.

8) Endast {2, 3, 3} uppfyller triangelolikheten. Arean blir enligt Herons formel:
Area = $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ där $p = (a+b+c)/2 = (2+3+3)/2 = 4$
Area = $\sqrt{4 \cdot (4-2) \cdot (4-3) \cdot (4-3)} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{8}$

9) Använd hjälplinjer som i bilden nedan



Notera att båda trianglarna består av 6 stycken mindre rätvinkliga trianglar med samma storlek. Arean av den lilla triangeln kan därför beräknas genom $A_{liten} = 6\frac{ac}{2}$. Arean av den stora triangeln kan på samma sätt beräknas genom $A_{stor} = 6\frac{br}{2}$.

Vi har liksidiga trianglar så $\theta = 30°$. Från inre triangeln ser vi att $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\sin\theta = \frac{c}{r} = \frac{1}{2}$. Från yttre triangeln ser vi att $\tan\theta = \frac{r}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Från dessa uttryck får vi att $a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $b = \sqrt{3}r$ och $c = \frac{1}{2}r$. Areorna kan således beräknas till:

$A_{liten} = 6\frac{\sqrt{3}}{8}r^2 = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$, $\quad A_{stor} = 6\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 = 3\sqrt{3}r^2$. Kvotten mellan dessa blir:

$\frac{A_{stor}}{A_{liten}} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}} = 4$

Svar: Den stora triangeln har 4 gånger större area än den lilla.

Klurigt

10) NEINODBAOSKTSETTÄTVOERRD

11) $\frac{8}{1-\frac{1}{5}} = 10$

12) Om du står på den absoluta nordpolen och går 1 mil söderut, sen 1 mil västerut, sen 1 mil norrut kommer du tillbaka till där du började
Om du står ungefär 1.16 mil norr om den absoluta sydpolen funkar det också. När du går 1 mil västerut i det här fallet kommer du att gå ett helt varv runt jorden och på så vis hamna tillbaka där du började.
Även ca 1.08 mil norr om sydpolen funkar då du kommer gå två varv runt jorden när du går 1 mil västerut.
Det finns alltså oändligt många punkter på jorden du kan stå på (ställer du dig närmare sydpolen kan du gå ännu fler varv runt jorden).

13) Detta går att göra på 14 försök! Låt apan kasta första nöten från våning 14. Om den går sönder, behövs det maximalt 13 försök till med andra nöten, testa först våning 1, sedan våning 2 och så vidare upp till våning 13 om det behövs. Då vet man exakt när nötter börjar gå sönder.

Om första nöten inte går sönder, har man 13 försök kvar. Testa då första nöten på våning 14+13 = 27. Går den sönder där har man 12 våningar kvar att testa (från 15 till 26) successivt med andra nöten.

Om första nöten inte går sönder, har man 12 försök kvar. Testa då den på våning 14+13+12 = 39. Om den går sönder, behöver man göra max 11 försök med andra nöten på samma sätt som förut.

Algoritmen fortsätter så, sedan skulle man testa första nöten på våning $14 + 13 + 12 + 11 = 50$, om det inte går sönder. Sedan på 14+13+12+11+10 = 60, sedan på 69, sedan på 77, sedan på 84, sedan på 90, sedan på 95, sedan på $14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4 = 99$. Och om den inte går sönder då heller, så har man till och med tre försök kvar. Det sista man gör är att slänga första nöten (ifall den inte har gått sönder tidigare) på våning 100, för att se om kokosnötter går sönder när man släpper därifrån.

På så vis räcker det med 14 försök hur utfallet än blir!

Antag att det räcker med 13 (eller färre) försök. Då måste första försöket för den första nöten ske på våning 13 eller mindre, annars räcker inte försöken till om den går sönder. Om nöten inte går sönder, kan de andra försöket ske på högst våning 13+12, annars räcker inte försöken med andra nöten till om första nöten går sönder. Osv... 13:e försöket med första nöten kan ske på max våning 13+12+...+1 = 91. Om nöten inte går sönder kan inte vi bestämma vilken av de högre våningarna den borde gått sönder på. Därför räcker inte 13 (eller färre) försök.

14) Hon börjar med exakt 4 st kanter. Notera att det bara finns tre olika sorters klippningar som går att göra. Hörn till hörn skapar 2 nya kanter. Hörn till kant skapar 3 nya kanter. Kant till kant skapar 4 nya kanter.

    Två klipp kan således leda till följande antal kanter $4 + \{2, 3 \text{ eller } 4\} + \{2, 3 \text{ eller } 4\}$ = 8, 9, 10, 11 eller 12

    Men (!)
    Hon kan inte få summan 8. Om hon under första klippet gör hörn till hörn skapas två trianglar, då blir det ganska omöjligt att under nästa klipp också klippa hörn till hörn. (Hur skulle de tre bitarna se ut om summan av antalet kanter var 8?)

    Svar: 9, 10, 11 eller 12

15) (1) Pappa och mamma passerar (2 minuter)
    (2) Pappa går tillbaka med lyktan (3 minuter)
    (3) Mormor och barnet passerar (13 minuter)
    (4) Mamma går tillbaka med lyktan (15 minuter)
    (5) Pappa och mamma passerar (17 minuter)

16) Om ett rep tänds på båda sidor kommer lågorna att mötas och repet brinna upp efter 30 minuter.
    Tänd på båda sidorna på rep 1 och endast en av sidorna på rep 2.
    När lågorna möts på rep 1 tänd på andra sidan av rep 2.
    När lågorna möts igen på rep 2 har ytterligare 15 minuter passerat(45 minuter totalt).

Mat

17) Antalet sidor som är kvar i boken är:
    $1 + 2 + 3... + N - x - (x + 1) = 15000$
    Där N är antal sidor och sidorna x och (x+1) är de sidor som rivits ut. x måste vara ett udda tal och (x+1) ett jämt tal på grund av hur böckers sidor är numrerade. Den första delen av vänster ledet är serien

$$1 + 2 + 3 + ... + N = \sum_{n=1}^{N} n$$

Med matematisk induktion kan man visa att denna serie kan skrivas som

$$1 + 2 + 3 + ... + N = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

(Kolla gärna upp detta på Youtube eller Wikipedia).
Vi kan med detta skriva om vårt startuttryck som:

$\frac{N(N+1)}{2} - x - (x+1) = 15000 \Leftrightarrow N(N+1) - 4x - 2 = 30000$

Vi har här en ekvation med 2 okända variabler, men vi kan ungefär gissa N eftersom variablerna måste passa till sidorna i en bok. Eftersom vi har 30000 i högerledet och ungefär N^2 i vänsterledet kan det vara rimligt att gissa att antal sidor N i boken är $N = \sqrt{30000} \approx 173$. Sätter vi in detta i vår ekvation får vi:
$30102 - 4x - 2 = 30000 \Rightarrow x = 25$. Då är även $x + 1 = 26$.

Svar: Sida 25 och 26 har rivits ut ur boken.

OBS:
Om vi istället väljer N = 172 blir ekvationen
$29756 - 4x - 2 = 30000 \Rightarrow x = -61.5$. Detta kan inte stämma eftersom boken inte har några negativa sidnummer.

Om vi väljer N = 174 blir ekvationen
$30450 - 4x - 2 = 30000 \Rightarrow x = 112$. Detta kan inte stämma eftersom x måste vara ett ojämnt tal.

Om vi väljer N = 175 blir ekvationen
$30800 - 4x - 2 = 30000 \Rightarrow x = 399$ Detta kan inte stämma eftersom x inte kan vara ett större tal än N som är bokens sista sida. Pss för alla tal N>175.

Att sidorna 25 och 26 har rivits ut är därför det enda rätta svaret.

18) Den nyköpta melonen vägde 10000 gram och eftersom 99% var vatten, så vägde vattnet i melonen 9900 gram. Det torra väger då 100 gram.

Om nu vattenmelonen torkar något och vatten utgör 98%, så utgör det torra 2%. Om 100 gram utgör 2% av vattenmelonen, så är 100% av vikten lika med 100g / 0.02 = 5000 gram.
Melonen väger nu alltså 5 kg. Vikten halverades!

19) 6 minuter är det kortaste tiden och på följande sätt utnyttjar du stekpannan maximalt:

1:a & 2:a minuten: Två hamburgare steks på en sida var
3:e & 4:e minuten: En halvfärdig hamburgare läggs åt sidan, den andra vänder man på. Samtidigt läggs en ny hamburgare på stekpannan. I slutet av de två minuterna finns en helt färdig hamburgare och en till halvfärdig.
5:e & 6:e minuten: De två halvfärdiga hamburgarna läggs på med stekt sida upp. I slutet av den sjätte minuten är allt färdigt!

20) Om alla 7 pannkakorna delas rättvist mellan de 3 personerna, så får var och en 7/3 pannkaka (det vill säga 2 stycken och 1/3). Det betyder att första reccen gav bort

2/3 pannkaka till vandraren, medan den andra gav bort 1 och 2/3 pannkaka, vilket kan skrivas som 5/3 pannkaka.

Om den första gav 2/3 medan den andra gav 5/3 borde den första få 2 kronor och den andra få 5 kronor, för att fördelningen ska bli rättvis.

21) För 1 propplärare tar det 5 min att göra 1 kanelbulle (de jobbar parallellt). Då tar det även 5 min för 100 propplärare att göra 100 kanelbullar.
Svar: 5 min

22) Om det nu vore så att alla reccar har samlat ihop olika antal kokosnötter så är det minsta antalet kokosnötter de kan ha samlat ihop
$0+1+2+3+...+14 = 14 \cdot 15/2 = 105$
vilket är fler än 100, därför måste minst två av reccarna ha samlat in samma antal kokosnötter.

Tid och hastighet

23) Man kan lösa den på två sätt. Man kan antingen ta fram variabler för bla flodens och mannens hastigheter och sedan lösa ekvationssystemet och det visar sig att mannens hastighet inte spelar någon roll när man räknar ut hastigheten för floden. Det andra sättet är att tänka sig bara mannen och floden, som om floden var stilla, tänk bort omgivningen. I det fallet ser man att mannen tappar byxorna, simmar iväg under 10 min och sedan tillbaka under 10 min. Men under dessa 20 min har floden hunnit flyta 1 km. Flodens hastighet blir således 1 km / 20 min = 3 km/h.

24) Tänk baklänges. För varje sekund som klockan tickar bakåt halveras antalet bakterier. Efter 59 sekunder var provröret alltså halvfullt.

25) Hastighet för minutvisaren v1 = 1 varv/h.
Hastighet för timvisaren v2 = 1/12 varv/h
Efter 1 timme har minutvisaren rört sig ett helt varv och timvisaren rört sig 1/12 varv. $s = v \cdot t$
$v1 \cdot t = 1/12 + v2 \cdot t$ t = tiden efter en timme tills visarna sammanfaller
$1 \cdot t = 1/12 + 1/12 \cdot t$
$t - t/12 = 1/12$
$t \cdot (1 - 1/12) = 1/12$
$t = (1/12) / (11/12) = 1/11$
Svar: 1 + 1/11 h (ungefär 1 timme 5 min och 27 s)

26) $(360/12)/4 = 30/4 = 7{,}5$ grader

27) p = sträcka plan mark, b = sträcka backen. Vad är 2p+2b?
$2 = p/12 + b/9 + b/18 + p/12$
$2 = p/6 + b/6$
$12 = p + b \quad 24 = 2p+2b$

Svar: 24 km

28) Inse att den lila delen av VL är densamma som det ursprungliga VL

a)

$x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}} = 2$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$
b)
$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}} = x$$
$\sqrt{x + x} = x$
$2x = x^2$
$x = 0$ eller $x = 2$

29) Byt plats på 3 och 4 i varje faktor. Multiplicera båda sidor med (4-3) = 1 och använd konjugatregeln upprepade gånger. Svaret blir x=64.

30) Antag att sådana två magiska tal a och b existerar.
Om a · b = a/b, så måste a · b · b = a. Det betyder att a = 0 eller b · b = 1.
Men a kan inte vara lika med 0, för då vore 0+b = 0 · b = 0, det vill säga b = 0 också. Men kvoten 0/0 är inte lika med 0.
Därför är b · b = 1, således b = 1 eller b = -1.
Men om b vore lika med 1, så skulle a+1 = a · 1 = a, vilken inte kan vara sant.

Så b = -1 och vi har att a-1 = a · (-1) = a/(-1). Om a-1 = -a, så gäller 2a = 1, det vill säga a= 1/2.

a = 1/2, b = -1 är en fungerande lösning, och det är även den enda lösningen.

31) Första steget är ok:
$x^2 + x + 1 = 0$

Att dela ekvationen med x är också ok:
$x + 1 + 1/x = 0$

Bägge ekvationerna ovanför har 2 lösningar, vilka är $x = -1/2 + i(\sqrt{3})/2$ och $x = -1/2 - i(\sqrt{3})/2$

Felet i det här falska beviset uppkommer under nästa steg. Vi byter ut $x + 1$ mot $-x^2$ för att få:
$-x^2 + 1/x = 0$

Den här ekvationen får nu 3 lösningar. Den har samma två komplexa lösningar, men också en extra lösning som är x = 1.

Eftersom x = 1 är en ny lösning vid detta steg, så kan vi inte stoppa in lösningen i den ursprungliga ekvationen.

Det är ett väldigt lurigt trick i det här problemet. Det man får tänka på i framtiden är att alla steg i ett bevis inte är reversibla, så det kan hända att man skapar ny lösningar. Ett exempel på ett liknande problem där det är enklare att se felet:
$x = -3$
$x^2 = (-3)^2$
$x^2 = 9$
$x = \pm 3$
stoppa in lösningen x=3 i ursprungs-ekvationen:

$3 = -3$

Blandat om tal

32) Innan din propplärare fick 21 genom att stryka sista siffran hade hen ett tal som var delbart med 7. Således hade hen antingen talet 217 eller 210. Innan hon multiplicerade med 7 hade hon alltså antingen talet 31 eller 30. Om ett tal börjar på 31 eller 30 och är delbart med 13, måste talet vara 312 (inga tresiffriga tal som börjar med 30 är delbara med 13). Innan dess måste talet ha varit $312/13 = 24$, vilket var det talet som din propplärare tänkte på från början.

33) Endast för primtalet 19. Betrakta ekvationen
$17p + 1 = n^2 \Leftrightarrow 17p = n^2 - 1 \Leftrightarrow 17p = (n-1)(n+1)$

För att faktoriseringen skall stämma måste vi ha att p är 19 eller 15, och eftersom 15 inte är ett primtal blir svaret 19.

34) Vi visar att $log_2(3) > 3/2 > log_3(5)$:
$9 > 8$
$3^2 > 2^3$
$3 > 2^{3/2}$ $log_2(3) > 3/2$

För den andra olikheten gör man samma sak, fast man jämför 27 och 25
$27 > 25$
$3^3 > 5^2$
$3^{3/2} > 5$
$3/2 > log_3(5)$

Sättet man hittar dessa är att man börjar (tex) från $log_2(3) > 3/2$ och förenklar:
$log_2(3) > 3/2$
$3 > 2^{3/2}$
$3^2 > 2^3$
$9 > 8$
Sedan skriver man det baklänges och får ett bevis

Svar: $log_2(3) > log_3(5)$

35) Förläng varje bråk med dess konjugatkvantitet t.ex.

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(4-3)} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

Summan blir en teleskopsumma
Svar: $\sqrt{101}$

36) Tänk dig att du redan löst uppgiften och svaret ser ut på formen abcdef, där a är första siffran, b är andra siffran, ända till f som är sista siffran. Det här svaret har egenskapen att:

abcdef + abcdef = fabcde

Tanken är nu att testa alla möjligheter på sista siffran och se vad som händer.

Av logiska skäl kan man inse att det inte kan vara 0 eller 1, för då blir det nya talet när man sätter den siffran först för litet. Så vi börjar med att testa att sista siffran är 2 vilket tyvärr råkar vara den bästa (korrekta) lösningen.

abcde2
+ abcde2

2abcde

Nu kan vi se att näst sista siffran måste vara 2+2=4

abcd42
+ abcd42

2abcd4

Om e=4 måste d=4+4=8

abc842
+ abc842

2abc84

Sen är det bara att fortsätta såhär till hela ekvationen går ut. Men tänk på att vi inte vet hur långt svaret är

1
ab...6842
+ ab...6842

2ab...684

Osv osv ända fram till det vackra svaret:

1 1   1111 1 11
105263157894736842
+ 105263157894736842 (detta tal är rätt svar)

210526315789473684 (detta är också ett svar, men det är inte det minsta talet)

37) Varje tal är summan av de två föregående
Svar: 34

38) Talet kan skrivas:
$10^{35} + 3 * 10^{24} + 7 * 10^{11} + 3 * 7 = 10^{24} * (10^{11} + 3) + 7 * (10^{11} + 3)$

som kan faktoriseras som:
$(10^{11} + 3) * (10^{24} + 7)$

Dvs det är ett sammansatt tal.

Paritet och invarians

I dessa problem gäller det att hitta något som bevaras i varje ”steg” i vilket förlopp det än är som pågår. Det är inte alltid lätt, man måste sitta o hålla på lite för att hitta de flesta av dessa.

39) Det är alltid ett jämnt antal glas som är rättvända. 7 är udda, vi kan alltså inte göra det.

40) En springare går alltid från vit till svart och från svart till vit. Ta fram ett schackbräde och prova för att övertyga dig. Dvs på jämna steg har vi alltid samma färg och på udda steg har vi den andra färgen. Det finns 64 rutor på ett schackbräde, vi ska alltså ta ett udda antal steg med springaren (63 st). Men motsatta hörn har samma färg på ett schackbräde. Det är alltså omöjligt. Kanske inte så tydligt, men det som bevaras är färgen vid jämna steg.

41) Spelet heter Nim, ska inte förklara här, wikipedia och internet förklarar mycket bättre.

42) Det som bevaras i detta fall är att hur vi än placerar en bricka så täcker den alltid en svart och en vit ruta. Dvs hur vi än lägger brickorna täcker vi lika många vita som svarta rutor. Men tar man bort motsatta hörn (som har samma färg!) så måste vi täcka antingen 30 vita och 32 svarta rutor eller 32 vita och 30 svarta. Det är omöjligt.

43) Fallet 2016: Om man bildar skillnaden av alla successiva par får man en följd av 1008 ettor och efter att ha gjort på samma sätt med dessa fås 504 nollor. Beträffande 2018 så fungerar det aldrig och det kan man se genom att konstatera att summan av alla talen blir 2018·2019/2 = 1009·2019 som är udda. Men om vi tar två tal m och n med m < n och ersätter dem med deras skillnad n - m så kommer summan att ändras med m + n - (n - m) = 2m som är ett jämnt tal. Så summan kommer fortfarande att vara (udda minus jämn = udda) udda. Det önskade slutresultatet med bara nollor så summan blir noll är ett jämnt tal. Alltså är det omöjligt.

44) Det är liknande tankesätt som förra uppgiften, av samma anledning så kan man inte få noll. Men man kan få 1:

1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 ... - 776 + 777

Regeln är att man börjar med 1 + 2 - 3 (som är noll). Nu har vi kvar (777 - 3)/2 = 387 par av tal (4 och 5, 6 och 7, osv). Tecknen vi gör på dem är (-4 + 5) för att få +1, (+6 - 7) för att få -1 osv, vi alternerar. Det sista paret ger en etta, och summan är 1.

Sannolikhet, kombinatorik och lådprincipen

45) x = antal vita bollar
16 - x = antal svarta bollar
$P_{(olika\ färg)} = P_{(lika\ färg)} = 1/2$
Möjliga utfall = välj 2 av 16 = 16 · 15/2 = 120

Gynnsamma utfall (olika färg) $= x * (16 - x) = 16x - x^2$

$P_{(olika\ färg)}$ = gynnsamma/möjliga =$(16x - x^2)/120$
$(16x - x^2)/120 = 1/2$
$16x - x^2 = 60$
$x = 8 \pm 2$

Svar: Det finns 6 bollar av ena färgen och 10 av den andra

46) Antalet förbindelser fås genom att räkna hur många som finns i varje stad (9st) och det är 27 städet totalt. Fast på detta vis räknar man ju varje förbindelse två gånger. Det ger antalet förbindelser till $27{\cdot}9/2 = 121.5$, men det är ju omöjligt.

47) Tänk värsta fall. I det mest extrema fallet så kunde hon ha tagit alla 32 svenska böcker, 4 franska, 5 spanska och bara en engelsk bok. Detta är totalt 42 böcker. Men tar hon en till måste hon ju ha minst två engelska böcker. Alltså måste hon ta 43 st för att vara säker på att få minst två engelska böcker.

48) Här gäller det att identifiera vad som är lådor i lådprincipen. Vi måste konstruera dem själva. Tanken är att vi ska gruppera om talen mellan 1 och 200 i högar så att om man tar två stycken ur någon av högarna så kommer den ena att dela den andra. Vi gör detta på ett girigt sätt. Vi lägger "2" i en låda, multiplicerar med något tal om och om igen för att försöka fånga in flera tal. Tex, tar vi 2 som faktor så får vi högen: {2, 4, 8, 16, 32, 64, 128}

Notera att väljer vi två tal så kan man alltid dela den ena med den andra. Nu har vi inte fångat in 3, multiplicerar vi detta med två får man högen:
{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192}

Och så vidare. Leker man med detta kan man till slut få ihop högarna som krävs. Detta är ett ganska stort exempel, men tar man talen upp till 20 kan man illustrera idén tydligare. För talen upp till 20 kan man välja högarna:

{1, 2, 4, 8, 16}
{3, 6, 12}
{5, 10, 20}
{7, 14}
{9, 18}
{11}
{13}
{15}
{17}
{19}

Notera att vi har 10 högar av tal, tar man två stycken ur någon hög så kommer man få två tal sådana att ena delar den andra. Väljer vi 11 tal får man garanterat minst två som kommer ur en och samma hög. Dvs vi får alltid två tal så att den ena delar den andra. Om man är intresserad så kan man få effektivare högar genom att kolla på så kallade divisibility trees, problemet blir att täcka en så kallat riktad graf med riktade undergrafer. För den som undrar mer, kan man kolla på greedy algorithms på wikipedia, det är relaterat till den första i tänk först.

49) Här gäller det att använda lådprincipen två gånger. Vi behöver inte alla punkter i planet, betrakta endast de med heltalskoordinater. Antag man har tre punkter, tex: {(n, 1),(n, 2),(n, 3)},

som står på varandra. Bland dessa finns det (minst) två stycken som är av samma färg (eftersom vi endast har två färger). Dvs för varje val av 3 sådana punkter finns det 2 som har samma färg.
Men det finns endast $2^3 = 8$ olika kombinationer som dessa tre punkter kan visa sig i. Så kolla på tripletten $\{$(n, 1),(n, 2),(n, 3)$\}$ för n = 1...9. Detta är nio stycken uppsättningar av tre prickar. (Minst) två av uppsättningarna är identiska, och båda dessa har (minst) två stycken röda prickar (eller vita, det spelar ingen roll). Men observera att på grund av hur vi har valt punkterna så kommer dessa totalt 4 röda (eller vita) prickar att bilda en rektangel.